Om Łukasiewicz setningslogiske modalsystem

Morten Rognes

1971

(Renskrevet og bearbeidet høsten 2008)

© Morten Harboe Rognes 2008

§1 Innledning

Łukasiewicz modalsystem fra 1953[1], det såkalte Ł-modale system, er sikkert et av de merkeligste modalsystemer som har blitt fremsatt.[2] Det er mulig at systemet bør karakteriseres som en ren kuriositet. Man kan imidlertid oppfatte systemet som et forsøk på å basere modallogikken på en flerverdig logikk. For en som er vant med Kripke-semantikk kan det virke merkelig med et slikt utgangspunkt, men historisk sett virker det mer forsåelig at man skulle være fristet til å gjøre et slikt forsøk i mellomkrigstiden og begynnelsen av femti-årene da man kan ha følt at spørsmålet om modallogikkens grunnlag var langt mer åpent enn det fortoner seg i dag. Når det gjelder Łukasiewicz system kan man faktisk være i tvil om det i det hele tatt dreier seg om et modallogisk system i egentlig forstand. Det er naturlig å stille følgende minimumskrav til et system for at det skal være et modalsystem: For det første må språket til systemet, i tillegg til de vanlige setningslogiske konnektivene, inneholde to modaloperatorer L og M, som svarer til henholdsvis nødvendighet og mulighet. Disse to operatorene bør være interdefinerbare. L må kunne defineres som ¬M¬, og M må kunne defineres ved hjelp av operatoren L som ¬L¬. Videre virker det naturlig å kreve at formler av typen Lα er sterkere enn α. Alle instanser av skjemaet Lα→α bør derfor være teoremer i systemet. Tilsvarende bør Mα være svakere enn α. Alle instanser av skjemaet α→Mα bør være teoremer i systemet. For det tredje må ikke operatoren L og M kunne defineres ved hjelp av de setningslogiske konnektivene. Endelig virker det rimelig å kreve at systemet inneholder en standard setningslogikk. Dette innebærer at alle instanser av de rent setningslogiske formler i språket er utledbare i systemet.[3]

De aller fleste modallogiske systemer som har blitt foreslått oppfyller disse kravene. Dette gjelder også Łukasiewicz system. Hvis derfor modallogikk defineres som en logikk som oppfyller disse krav må man regne systemet som en slik logikk. Kravene virker rimeligvis nødvendige. Dette innebærer imidlertid ikke at de er tilstrekkelige. Pålegger man et system ytterligere krav for at det skal kunne kvalifisere som et modalsystem kan det være mer tvilsomt om det Ł-modale system kan regnes som en modallogikk.

Hovedformålet med dette skrift er å vis hvordan det vi her kaller halvsyntaktiske modeller for modallogiske språk kan benyttes ved studiet av Łukasiewicz' system Ł og to relaterte systemer, nemlig det vi kaller det trivielle systemet, O, og det som her blir kalt falsum-systemet, F.[4] Vi spesifiserer tre klasser av halvsyntaktiske modeller som svarer til disse tre systemene og viser at systemene er komplette med hensyn på sine respektive modellklasser. Ved hjelp av disse fullstendighetsresultatene kan vi så vise det velkjente resultat at teoremene i det Ł-modale systemet er snittet av teoremene i det trivielle system og teoremene i falsum-systemet.[5]

Łukasiewicz' system er en fireverdig logikk. Systemet er definert ved et sett av fireverdige matriser for de setningslogiske konnektivene og modaloperatorene L og M. En formel er gyldig om den alltid får den utpekte sannhetsverdien 1, når man kalkulerer på basis av matrisene, uansett hvilke sannhetsverdier man tilordner setningsvariablene. Man kan vise

1 Se Łukasiewicz [1]

2 En ganske utførlig redegjørelse for systemets merkverdige trekk er gitt i Hughes & Cresswell [1], side 307-310

3 Disse kravene er hentet fra Hughes & Cresswell. Se Hughes & Cresswell [1], side 310. Se også Priors redegjørelse for dette systemet i Prior [1].

4 Terminologien her er hentet fra Kripke [1]. Se dette arbeidet side 210.

5 Dette resultat ble først bevist av Prior. Et bevis for påstanden, hvor beviset ikke har den samme strukturen som det vi leverer her, er gitt i Kripke [1]. Se Kripke [1], særlig side 207 og side 210.

© Morten Harboe Rognes 2008

at ethvert teorem i systemet er gyldig når det evalueres i overenstemmelse med matrisene, og omvendt, at enhver formel som er gyldig når matrisene legges til grunn også er et teorem i systemet. Vårt bidrag er å vise hvordan man ved hjelp av halvsyntaktiske modeller og kompletthetsteoremene som ble nevnt ovenfor kan oppnå dette resultat.

§2 Grunnleggende syntaktiske begreper

Vi tar vårt utgangspunkt i et enkelt setningslogisk språk L hvor de primitive symbolene er: (i) en tellbart uendelig mengde med setningsbokstaver p;1, p;2, p;3,..... , videre (ii) de setningslogiske konnektivene → og ¬, som står for henholdsvis materiell implikasjon og negasjon, samt (iii) den monadiske modaloperatoren L. I tillegg til disse uttrykkene inngår de vanlige parantestegnene i L

De velformede formlene i L, vi betegner mengden av velformede formler med Fm(L), er avgrenset ved de følgende regler: (a) Enhver setningsbokstav er en velformet formel. (b) Er α og β velformede formler så er også (¬α), (α→ β) og Lα velformede formler. (c) Ingen andre formler enn dem som er det etter reglene (a) og (b) er velformede formler.

Når det gjelder de andre vanlige setningslogiske konnektivene, disjunksjon, konjunksjon og bikondisjonal, samt mulighetsoperatoren M, defineres disse på følgende vis:

Definisjon 2.1

$\alpha \vee \beta = (\neg\alpha) \rightarrow \beta$
$\alpha \& \beta = \neg(\alpha \rightarrow (\neg\beta))$
$\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \rightarrow \beta) \& (\beta \rightarrow \alpha)$
$M\alpha = \neg L\neg\alpha$

Med et setningslogisk aksiom i L forstår vi enhver formel som er en instans av ett av de følgende skjemaer:

(S1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
(S2) $((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
(S3) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

I de logikkene vi skal betrakte er det bare en slutningsregel, nemlig modus ponens. Som bekjent er dette

$\vdash \alpha \& \vdash(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \vdash \beta$

Med mengden av setningslogisk gyldige formler i L forstår vi den minste mengden av formler i L som inneholder alle instanser av skjemaene S1 - S3 og som er lukket under modus ponens.

La X være en mengde av formler i L. Med logikken som har formlene i X som aksiomer forstås da den minste mengden av formler i L som inneholder (i) alle formlene i X, (ii) alle de setningslogiske aksiomene i L og som (iii) er lukket under modus ponens.

Łukasiewicz setningslogiske modallogikk som vi betegner med Ł er den logikken i L som i tillegg til de setningslogiske aksiomene i L også inneholder alle formler i L som er instanser av de følgende to aksiomskjemaer:

B1 $L\alpha \rightarrow \alpha$
B2 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (L\alpha \rightarrow L\beta)$

Ingen andre enn aksiomskjemaene S1 - S3 og B1, B2 er aksiomskjemaer i systemet. Systemet inneholder i tillegg bare en slutningsregel, nemlig modus ponens. Man kan også, om man betegner mengden av de formler i L som er instanser av B1 og B2 med X;0 si at systemet Ł er

© Morten Harboe Rognes 2008

logikken som har formlene i X;0 som aksiomer.

Vi skal betrakte to andre logiske systemer, nemlig det såkalte "falsum"-systemet - vi skal kalle det for "F-systemet" - og et system som vi skal kalle for det trivielle modalsystem.

F-systemet, vi betegner det med F, er det modallogiske systemet som har S1 - S3 samt det følgende aksiomskjema, nemlig:

B3 $\neg L\alpha$

som aksiomskjemaer. Den eneste slutningsregelen i systemet er modus ponens.

Det trivielle system er det system som har S1 -S3 som aksiomskjemaer og i tillegg det følgende:

B4 $\alpha \leftrightarrow L\alpha$

som aksiomskjemaer. Ingen andre formler i L enn dem som er instanser av disse skjemaene er aksiomer i dette systemet. Den eneste slutningsregelen i det trivielle systemet er modus ponens.

I det følgende skal vi betegne det trivielle systemet med O.

Dermed har vi definert de systemene vi skal arbeide med i resten av dette notatet.

Anta S er en logikk med formlene i X som aksiomer. Med et bevis i systemet S mener vi en endelig sekvens av formler i L der hver formel enten er et aksiom i systemet S eller er sluttet fra to tidligere formler i rekken ved hjelp av modus ponens. En formel er bevisbar i systemet S om det finnes et bevis i S der formelen er den siste formelen i rekken av de formler som utgjør beviset. Vi skriver "S|-α" som forkortelse for "α er bevisbar i systemet S". Er α en eller annen formel i L innebærer eksempelvis O |- α at formelen α er bevisbar i systemet O, dvs. det trivielle systemet.

Er Δ en mengde med formler i L skal vi si at formelen α er bevisbar i systemet S på basis av formlene i Δ hvis og bare hvis det finnes en endelig rekke med formler β;1,..., β;n (n>=1) der β;n = α og hvor hver formel enten er et aksiom i S, eller en formel i Δ, eller er sluttet fra to tidligere formler i rekken ved hjelp av modus ponens. Vi skriver "(Δ,s) |- α" som forkortelse for " formelen α er bevisbar i systemet S på basis av formlene i Δ".

§3 Modellteori for setningslogiske systemer i L. halvsyntaktiske modeller

Med en sannhetsmengde, Δ, i L forstår vi en formelmengde Δ som oppfyller de følgende krav:

(i) For enhver setningsbokstav p i L har man enten at p eller ¬p er med i Δ. (ii) Er α en vilkårlig formel i L har man at $(\neg\alpha)\hat{e}\Delta$ hvis og bare hvis det ikke er slik at α er med i Δ. (iii) Er α,β vilkårlige formler i L har man at $(\alpha\rightarrow\beta)\hat{e}\Delta$ hvis og bare hvis man har at dersom α er med i Δ så er β det også.

Vi skal nå definere hva vi forstår med en halvsyntaktisk modell for L. Vi formulerer denne definisjonen formelt slik:

Definisjon 3.1 Med en *halvsyntaktisk* modell M forstås et ordnet par <Δ,R> som oppfyller de følgende krav:

(i) Δ er en sannhetsmengde
(ii) R er en, muligens tom, mengde med formler i L
(iii) $(A\alpha)(\alpha\hat{e}Fm(L) \rightarrow (L\alpha)\hat{e}\Delta \leftrightarrow \alpha\hat{e}R)$

I det følgende skal vi kalle det som her har blitt omtalt som halvsyntaktiske modeller for modeller[6]. En formel α sies å være gyldig dersom vi har for enhver halvsyntaktisk modell

6 Ganske enkelt fordi ordet uttrykket "modell" er kortere en "halvsyntaktisk modell". Når ordet "modell"

© Morten Harboe Rognes 2008

M=<Δ,R> at αêΔ.

Det er ganske lett å se at alle setningslogisk gyldige formler i L er gyldige i den betydning som er angitt her. Det er med andre ord slik at dersom α er en setningslogisk gyldig formel så har man at αêΔ for enhver halvsyntaktisk modell <Δ,R>. Legger man forskjellige krav på de halvsyntaktiske modellene vil det være flere formler i L som blir gyldige en bare de setningslogiske teoremene i L. Vi skal nå definere tre klasser av modeller som svarer henholdsvis til systemene Ł, F og O.

Definisjon 3.2 Med en Ł-modell M forstås en halvsyntaktisk modell M= <Δ,R> som oppfyller de følgende krav:

(1) (Aα)(αêFm(L) →. Lα êΔ → αêΔ)

(2) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) →. (α→β)êΔ → αêR → βêR)

Man ser at kravene (1) og (2) i denne definisjonen svarer til aksiomskjemaene B1 og B2 som vi nevnte i §2. På tilsvarende vis defineres hva som menes med en F-modell og en O-modell.

Definisjon 3.3 Med en F-modell M forstås en halvsyntaktisk modell M= <Δ,R> som oppfyller de følgende krav:

(1) R=ø

Man siden enhver semisyntakstisk modell M=<Δ,R> er slik at en formel α i L er med i R hvis og bare hvis LαêΔ ser man, siden det kreves at R er en tom mengde, at ¬Lα er med i Δ for alle formler α om man har å gjøre med en F-modell.

En O-modell defineres slik:

Definisjon 3.4 Med en O-modell M forstås en halvsyntaktisk modell M= <Δ,R> som oppfyller de følgende krav:

(1) (Aα)(αêFm(L) →. Lα êΔ → αêΔ)

(2) (Aα)(αêFm(L)→. αêΔ → αêR)

I denne forbindelse med denne definisjonen ser man at det første kravet garanterer at Lα → α kommer ut som sann i enhver O-modell. Det andre kravet svarer til kondisjonelen mot høyre i skjemaet B4 og garanterer at α→ Lα er med i Δ for enhver O-modell M= <Δ,R>

En formel α kalles Ł-gyldig (F-gyldig, O-gyldig) hvis og bare hvis vi har, for enhver Ł-modell (F-modell, O-modell) M= <Δ,R>, at αêΔ.

Klassen av Ł-modeller betegner vi med |Ł|. Tilsvarende betegnes klassen av F-modeller og O-modeller med henholdsvis |F| og |O|. Vi skal vise at man har |Ł| = |F| U |O| i §5. Man kan imidlertid notere at det fremgår fra definisjonene ovenfor at vi må ha at |F| Ω |O| =ø. I enhver O-modell må vi nemlig i kraft av kravet (2) i Definisjon 3.4 ha at R≠ø. Men i enhver F-modell kreves det at denne mengden er tom. Det følger at det ikke kan finnes noen halvsyntaktisk modell som samtidig er en F-modell og en O-modell.

Før vi går videre innfører vi projeksjonsfunksjonen π på ordnete par ved de følgende stipulasjoner: Er a= <x,y> setter vi π;1(a) = x og π;2(a) =y. Det er med andre ord slik at dersom a er et ordnet par betegner π;1(a) den første komponenten i paret og π;2(a) den andre komponenten i paret. Trivielt har vi da at a= <π;1(a), π;2(a)> om a er et par.

I det følgende skal vi vise at systemene Ł, F og O er fullstendige med hensyn på de

brukes i det følgende skulle det uansett gå klart frem fra sammenhengen at det må dreie seg om den typen strukturer som er avgrenset ved Definisjon 3.1.

© Morten Harboe Rognes 2008

gyldighetskriterene vi har satt opp. Dette innebærer at vi skal vise at man har for enhver formel α i L at α er bevisbar i Ł (F,O) hvis og bare hvis α er Ł-gyldig (F-gyldig, O-gyldig).

Satsen kan formuleres mer formelt slik:

Teorem 3.5: Vi har:

(i) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow .Ł \mid\!- \alpha \leftrightarrow (AM)(M\hat{e} \mid Ł\mid \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M)))$

(ii) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow .F \mid\!- \alpha \leftrightarrow (AM)(M\hat{e} \mid F\mid \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M)))$

(iii) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow .O \mid\!- \alpha \leftrightarrow (AM)(M\hat{e} \mid O\mid \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M)))$

Strengt tatt er beviset for denne satsen av en rent rutinemessig karakter. I denne paragrafen skal vi for tydelighetens skyld gi detaljerte bevis for gyldighetsdelene i teoremet. I det neste avsnittet skal vi gi bevis for fullstendighetsdelene. Vi skal med andre ord bevise følgende her:

Teorem 3.6: (Gyldighetsteorem) Vi har:

(i) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow .Ł \mid\!- \alpha \rightarrow (AM)(M\hat{e} \mid Ł\mid \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M)))$

(ii) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow .F \mid\!- \alpha \rightarrow (AM)(M\hat{e} \mid F\mid \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M)))$

(iii) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow .O \mid\!- \alpha \rightarrow (AM)(M\hat{e} \mid O\mid \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M)))$

Bevis: Siden ethvert av systemene Ł, F, O er en utvidelse av den vanlige setningslogikken er det nødvendig å vise at alle instanser av aksiomskjemaene S1 - S3 holder i de forskjellige modellklasser. Man ser imidlertid at dersom en formel er gyldig i enhver halvsyntaktisk modell så vil den også være gyldig i enhver Ł-modell (F-modell, O-modell). Når det gjelder S1 - S3 vil det derfor være nok å vise at de alle holder i alle halvsyntaktiske modeller.

(a) Anta M= <Δ, R> er en vilkårlig halvsyntaktisk modell. Anta α,β er vilkårlige formler i L. Vi har åpenbart $\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow (\beta \hat{e} \Delta \rightarrow \alpha \hat{e} \Delta)$. Fra dette følger, siden Δ er en sannhetsmengde $\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \hat{e} \Delta$. Herav har vi så, igjen fordi Δ er en sannhetsmengde at $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \hat{e} \Delta$. Dette viser at S1 holder i alle halvsyntaktiske modeller.

(b) Anta M= <Δ, R> er en vilkårlig halvsyntaktisk modell. Anta α,β er vilkårlige formler i L. Det skulle være klart at vi på basis av ren setningslogikk har at

(1) $(\neg(\beta \hat{e} \Delta) \rightarrow \neg(\alpha \hat{e} \Delta)) \rightarrow (\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \beta \hat{e} \Delta)$. Siden Δ er en sannhetsmengde har vi

(2) $(\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Delta \leftrightarrow (\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \beta \hat{e} \Delta)$ og (3) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow (\neg(\alpha \hat{e} \Delta) \leftrightarrow (\neg\alpha) \hat{e} \Delta))$. Fra (1) - (3) kan man slutte: (4) $((\neg\beta) \hat{e} \Delta \rightarrow (\neg\alpha) \hat{e} \Delta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Delta$. Siden Δ er en sannhetsmengde følger herav: $((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)) \hat{e} \Delta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Delta$. Herav følger i sin tur, når man tar hensyn til kravet (iii) i definisjon av sannhetsmengde, at $S2 \hat{e} \Delta$. Det følger at S2 holder i enhver halvsyntaktisk modell.

(c) Anta M=<Δ,R> er en halvsyntaktisk modell og at α,β,γ er vilkårlige formler i L. Da har vi åpenbart $(\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow (\beta \hat{e} \Delta \rightarrow \gamma \hat{e} \Delta)) \rightarrow ((\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \beta \hat{e} \Delta) \rightarrow (\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \gamma \hat{e} \Delta))$. Ved å anvende kravet (iii) i definisjonen av sannhetsmengde ser man at vi har:

$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \hat{e} \Delta \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Delta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \hat{e} \Delta)$ og derfor

$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \hat{e} \Delta \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \hat{e} \Delta$. Herav følger så i sin tur, igjen ved hjelp av kravet (iii) i definisjonen vi ga av sannhetsmengde, at $S3 \hat{e} \Delta$. Siden modellen M og formlene α,β,γ var vilkårlig valgt, viser dette at enhver instans av S3 holder i enhver halvsyntaktisk modell.

(d) Anta C er en delmengde av de halvsyntaktiske modellene. Vi skal vise at dersom α og $\alpha \rightarrow \beta$ holder i alle modeller i C så gjør β det også, med andre ord skal vi vise at modus ponens bevarer C-gyldighet. Anta α og $\alpha \rightarrow \beta$ holder i enhver modell i mengden C. Dette innebærer at

(1) $(AM)(M \hat{e} C \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M))$ og

(2) $(AM)(M \hat{e} C \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \pi;1(M))$

Anta M= <Δ,R> er en vilkårlig modell i C. Da har vi fra (1) og (2) at

© Morten Harboe Rognes 2008

αêΔ & (α→β)êΔ. Men siden Δ er en sannhetsmengde følger fra det at (α→β)êΔ at vi har αêΔ → βêΔ. Fra dette og det at αêΔ følger βêΔ. Siden M var et vilkårlig element i C har vi altså bevist: (AM)(MêC → αêπ;1(M)), med andre ord at også β holder i alle modeller i C.
(e) For å vise at at alle Ł-teoremene holder i alle Ł-modeller er det, i lys av det vi har vist under punkt (a) - (d), nok å vise at B1 og B2 holder i enhver Ł- modell. Vi tar først for oss B1. La M=<Δ,R> være en vilkårlig Ł-modell. Fra Definisjon 3.2 har vi da:

(Aα)(αêFm(L) →. Lα êΔ → αêΔ). Siden Δ er en sannhetsmengde kan vi da slutte: (Aα)(αêFm(L) →. (Lα→ α)êΔ). Dette viser at B1 holder i enhver Ł-modell. La oss så ta for oss 2. Anta igjen at M=<Δ,R> er en vilkårlig Ł-modell. Det andre kravet i Definisjon 3.2 sier da at (1) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) →. (α→β)êΔ → αêR → βêR). Nå er enhver enhver Ł-modell en halvsyntaktisk modell og oppfyller derfor kravet:

(2) (Aα)(αêFm(L) → (LαêΔ ↔ αêR))

Fra (1) og (2) følger: (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) →. (α→β)êΔ → LαêΔ → LβêΔ). Fra dette kan vi så slutte, siden Δ er en sannhetsmengde at

(Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) →. (α→β)êΔ → (Lα → Lβ)êΔ)

Herav kan vi så slutte: (Aα)(A(β)(α,βêFm(L) →. ((α→β) → (Lα → Lβ))êΔ). Dette viser at også B2 holder i enhver Ł-modell. Dermed har vi bevist at (i) i Teorem 3.6 holder.
(f) For å vise riktigheten av (ii) i Teorem 3.6 er det nok å vise at B3, ie ¬Lα holder i enhver F-modell for enhver formel α i L. Anta derfor M=<Δ,R> er en vilkårlig F-modell og at α er en vilkårlig formel i L. Siden M er en F-modell har vi i lys av Definisjon 3.3 at (1) R=ø. Siden enhver F-modell også er en halvsyntaktisk modell har vi enn mer at:
(2) LαêΔ ↔ αêR. Fra (1) og (2) følger åpenbart at ¬(LαêΔ), og derfor, siden Δ er en sannhetsmengde, at (¬Lα)êΔ. Dette viser at B3 holder i enhver F-modell. Dermed har vi også gitt bevis for punkt (ii) i satsen.
(g) For å vise at alle teoremer i systemet O holder i alle O-modeller er det, i lys av det vi har bevist ovenfor under (a) - (d) nok å vise at B4 holder i alle O-modeller. Anta M=<Δ,R> er en vilkårlig O-modell og at α er en vilkårlig formel i L. Siden enhver O-modell er en halvsyntaktisk modell har vi: (1) LαêΔ ↔ αêR. Siden M er en O-modell har vi også i lys av Definisjon 3.4 at (2) (Aα)(αêFm(L) →. Lα êΔ → αêΔ) og (3) (Aα)(αêΔ → αêR). Siden α er en vilkårlig formel har vi fra (2) at (Lα → α)êΔ. Fra (1) og (3) følger så siden Δ er en sannhetsmengde at (α→Lα)êΔ. Man ser derfor at (α ↔ Lα)êΔ. Siden α var en vilkårlig formel og M en vilkårlig O-modell følger det at punkt (iii) i satsen holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

§4 Maksimalt konsistente mengder. Bevis for fullstendigheten til systemene Ł, F og O.

Vi har nå vist den ene halvdelen av Teorem 3.5. I dette avsnittet skal vi gi bevis for den andre halvdelen. I det følgende lar vi S stå for et av systemene Ł, F eller O eller et hvilket som helst annet system som er en utvidelse av det setningslogiske systemet ovenfor.

Anta Δ er en formelmengde i L. Vi sier da at den er *S-konsistent* hvis og bare hvis det ikke er slik at det finnes formler β;1,....,β;n (n>=1) slik at S |- ¬(β;1&...&;n). En mengde med formler Δ i L kalles for maksimalt S-konsistent hvis og bare hvis vi har (i) at Δ er S-konsistent og (ii) at det ikke finnes noen formel β i L som ikke er med i Δ slik at ΔU{β} er S-konsistent.

En maksimalt S-konsistent formelmengde er altså en S-konsistent formelmengde som ikke kan utvides med noen nye formler uten at resultatet blir en formelmengde som ikke er S-konsistent. Vi skal ta for gitt den følgende sats, Lindenbaums lemma, som sier at enhver S-konsistent mengde kan utvides til en maksimalt S-konsistent mengde.

Teorem 4.1 Er Δ en S-konsistent mengde med formler i L finnes det en mengde Γ med

© Morten Harboe Rognes 2008

formler i L som er maksimalt S-konsistent og der Δ er inkludert i Γ.

Når det gjelder bevis for denne satsen kan man konsultere Hughes & Cresswell [1], side 150 -152. Vi trenger også det følgende teorem som viser hva slags egenskaper maksimalt konsistente mengder har. Heller ikke her gir vi noe detaljert bevis, men alt som er nevnt i satsen følger lett fra de satsene som er detlajert bevist i Hughes & Cresswell [1] på side 152 - 154.

Teorem 4.2 Anta Δ er en formelmengde i L som er maksimalt S-konsistent. Da gjelder følgende:

(i) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow \neg(\alpha \hat{e} \Delta \ \& \ (\neg\alpha)\hat{e}\Delta))$
(ii) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow \alpha \hat{e} \Delta \ v \ (\neg\alpha)\hat{e}\Delta)$
(iii) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow ((\neg\alpha)\hat{e}\Delta \leftrightarrow \neg(\alpha \hat{e} \Delta)))$
(iv) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow S \vdash \alpha \rightarrow \alpha \hat{e} \Delta)$
(v) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow \alpha, (\alpha \rightarrow \beta)\hat{e}\Delta \rightarrow \beta \hat{e} \Delta)$
(vi) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta)\hat{e}\Delta \leftrightarrow (\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \beta \hat{e} \Delta)))$
(vii) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow ((\alpha \leftrightarrow \beta)\hat{e}\Delta \leftrightarrow (\alpha \hat{e} \Delta \leftrightarrow \beta \hat{e} \Delta)))$
(viii) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow ((\alpha v \beta)\hat{e}\Delta \leftrightarrow (\alpha \hat{e} \Delta \ v \ \beta \hat{e} \Delta)))$
(ix) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow ((\alpha \& \beta)\hat{e}\Delta \leftrightarrow (\alpha \hat{e} \Delta \ \& \ \beta \hat{e} \Delta)))$

Man ser fra denne satsen at dersom Δ er en maksimalt S-konsistent mengde har man Δ også er en sannhetsmengde. Dette følger fra punktene (i), (iii) og (v).

Etter disse forberedelsene kan vi nå gå over til fullstendighetsbeviset for kalkylene Ł,F og O. Vi skal gi bevis for den følgende sats:

Teorem 4.3: Vi har:

(i) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow . (AM)(M \hat{e} |Ł| \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M)) \rightarrow Ł \vdash \alpha)$
(ii) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow . (AM)(M \hat{e} |F| \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M)) \rightarrow F \vdash \alpha)$
(iii) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow . (AM)(M \hat{e} |O| \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M)) \rightarrow O \vdash \alpha)$

Sammen med Teorem 3.6 ser man at denne satsen impliserer Teorem 3.5.

Bevis: *Ad (i)*: Anta α er en vilkårlig formel i L og anta (1) ¬(Ł|-α). Ved hjelp av definisjonen av konsistent formelmengde kan vi da slutte at {¬α} er en Ł-konsistent formelmengde. Fra dette og Lindenbaums lemma, Teorem 4.1 følger at det finnes en maksimalt Ł-konsistent formelmengde Γ slik at (2) {¬α} Inkl Γ. Definer R ved å sette:

(3) $R = Mg(\alpha: \alpha \hat{e} Fm(L) \ \& \ L\alpha \hat{e} \Gamma)$

Definer M ved å sette: (4) M= <Γ,R>. Vi skal vise at M er en Ł-modell, dvs. oppfyller kravene i Definisjon 3.2. La oss først bemerke at siden Γ er maksimalt konsistent har vi at Γ oppfyller kravene til en sannhetsmengde. Videre følger direkte fra definisjonen (3) at

(5) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow (L\alpha \hat{e} \Gamma \leftrightarrow \alpha \hat{e} R))$. Dette viser at M er en halvsyntaktisk modell. For å vise at M er en Ł-modell må vi i lys av Definisjon 3.2 vise følgende:

(6) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow . L\alpha \ \hat{e} \Gamma \rightarrow \alpha \hat{e} \Gamma)$
(7) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow . (\alpha \rightarrow \beta)\hat{e}\Gamma \rightarrow \alpha \hat{e} R \rightarrow \beta \hat{e} R)$

La oss først ta for oss (6). Anta $\alpha \hat{e} Fm(L)$. Da har vi Ł|- Lα→ α. Ved hjelp Teorem 4.2, punkt (iv) kan vi da slutte: $(L\alpha \rightarrow \alpha)\hat{e}\Gamma$. Ved hjelp av det samme teorem, punkt (vi) følger $L\alpha \ \hat{e} \Gamma \rightarrow \alpha \hat{e} \Gamma$. Dette viser at (6) holder.

© Morten Harboe Rognes 2008

Anta α,βêFm(L) og at (8) (α→β)êΓ. Vi har Ł|- (α→β) → Lα→Lβ. Derfor følger ved hjelp av Teorem 4.2 at ((α→β) → Lα→Lβ)êΓ. Fra dette og punkt (iv) i det samme teoremet følger sammen med (8) at (Lα→Lβ)êΓ. Herav har vi så (9) LαêΓ → LβêΓ. Ved hjelp av (5) følger så det vi ønsker, nemlig: αêR → βêR. Dette viser at (7) holder. Vi har nå vist at M oppfyller kravene som stilles til en Ł-modell. Vi har altså:

(10) M=<Γ,R>ê|Ł|. Siden {¬α} Inkl Γ følger at (¬)αêΓ og derfor ¬(αêΓ). Da har vi: ¬(αê π;1(M)). Fra dette følger (EM)(Mê|Ł| & ¬(αê π;1(M))). Dette viser at (i) i teoremet holder.

Ad (ii): Anta α er en vilkårlig formel i L og anta (1) ¬(F|-α). Ved hjelp av definisjonen av konsistent formelmengde kan vi da slutte at {¬α} er en F-konsistent formelmengde. Fra dette og Lindenbaums lemma, Teorem 4.1 følger at det finnes en maksimalt F-konsistent formelmengde Γ slik at (2) {¬α} Inkl Γ. Definer R ved å sette:

(3) R = Mg(α: αêFm(L) & LαêΓ)

Definer M ved å sette: (4) M= <Γ,R>. Vi skal vise at M er en F- modell, dvs. oppfyller kravene i Definisjon 3.3. La oss først bemerke at siden Γ er maksimalt konsistent har vi at Γ oppfyller kravene til en sannhetsmengde. Videre følger direkte fra definisjonen (3) at

(5) (Aα)(αêFm(L) → (LαêΓ ↔ αêR)). Dette viser at M er en halvsyntaktisk modell. For å vise at M er en F-modell må vi i lys av Definisjon 3.2 vise følgende:

(6) R=ø

Anta for reduktio ad absurdum at R≠ø. Da finnes βêFm(L) slik at (7) βêR. Fra dette og (5) følger (8) LβêΓ. Men F|- ¬Lβ. derfor må vi i lys av Teorem 4.2 punkt (iii) ha (¬Lβ)êΓ. Men fra dette og Teorem 4.2, punkt (iii), følger ¬(LβêΓ). Dette strider mot (8). Dette viser at (6) holder. Det følger at M oppfyller kravene til en F-modell.

Vi har derfor: (10) M=<Γ,R>ê|F|. Siden {¬α} Inkl Γ følger at (¬)αêΓ og derfor ¬(αêΓ). Da har vi: ¬(αê π;1(M)). Fra dette følger (EM)(Mê|F| & ¬(αê π;1(M))). Dette viser at (ii) i teoremet holder.

Ad (iii): Anta α er en vilkårlig formel i L og anta (1) ¬O|-α). Ved hjelp av definisjonen av konsistent formelmengde kan vi da slutte at {¬α} er en O-konsistent formelmengde. Fra dette og Lindenbaums lemma, Teorem 4.1 følger at det finnes en maksimalt O-konsistent formelmengde Γ slik at (2) {¬α} Inkl Γ. Definer R ved å sette:

(3) R = Mg(α: αêFm(L) & LαêΓ)

Definer M ved å sette: (4) M= <Γ,R>. Vi skal vise at M er en O-modell, dvs. oppfyller kravene i Definisjon 3.2. La oss først bemerke at siden Γ er maksimalt konsistent har vi at Γ oppfyller kravene til en sannhetsmengde. Videre følger direkte fra definisjonen (3) at

(5) (Aα)(αêFm(L) → (LαêΓ ↔ αêR)). Dette viser at M er en halvsyntaktisk modell. For å vise at M er en O-modell må vi i lys av Definisjon 3.2 vise følgende:

(6) (Aα)(αêFm(L) →. Lα êΓ → αêΓ)

(7) (Aα)(αêFm(L) →. αêΓ → αêR)

La oss først ta for oss (6). Anta αêFm(L). Da har vi O|- Lα→ α. Ved hjelp Teorem 4.2, punkt (iv) kan vi da slutte: (Lα→α)êΓ. Ved hjelp av det samme teorem, punkt (vi) følger Lα êΓ → αêΓ. Dette viser at (6) holder.

Anta αêFm(L) og at (8) αêΓ. Vi har O|- α → Lα. Derfor følger ved hjelp av Teorem 4.2 at (α → Lα)êΓ. Fra dette og punkt (iv) i det samme teoremet følger sammen med (8) at LαêΓ. Herav har vi så (9) αêR ved hjelp av (5). Vi har nå vist at M oppfyller kravene som stilles til en O -modell. Vi har altså:

(10) M=<Γ,R>ê|O|. Siden {¬α} Inkl Γ følger at (¬)αêΓ og derfor ¬(αêΓ). Da har vi:

© Morten Harboe Rognes 2008

¬(αê π;1(M)). Fra dette følger (EM)(Mê|O| & ¬(αê π;1(M))). Dette viser at (iii) i teoremet holder.

Vi har nå gitt et helt fullstendig bevis for satsen. **QED.**

§5 Systemet Ł*. Bevis for at Ł* og Ł er ekvivalente

Det er mulig å vise at teoremene i Łukasiewicz modalsystem Ł er snittet av teoremene i "falsum"-systemet og teoremene i det trivielle systemet. Med andre ord har vi

Teorem 5.1 Er αêFm(L) holder:
Ł |-α ↔ (F |- α & O |- α)

Dette følger dersom vi kan vise at klassen av Ł-modeller er identisk med unionen av mengden F-modeller og mengden av O-modeller, det vil si om vi kan vise (+) |Ł| = |F| U |O|. Dette skal vi gjøre nedenfor. Ved hjelp av fullstendighetsresultatene i forrige avsnitt og (+) ser man ganske raskt at Teorem 5.1 holder. Men før vi gjør dette har vi funnet det hensiktsmessig å vise at Ł er ekvivalent med et annet system som vi nå skal definere og som her vil bli kalt for Ł*. Dette er definert slik:

Ł* er det systemet som har som aksiomskjemaer S1 - S3 samt B1. Dessuten inneholder systemet det følgende aksiomskjema:

B5 α → (Lγ → Lα)

Ingen andre aksiomskjemaer enn disse er inkludert i systemet. Som eneste slutningsregel har systemet modus ponens.

Vi definerer hva som menes med en modell for dette systemet ved den følgende definisjon:

Definisjon 5.2 Med en Ł*-modell M forstås en halvsyntaktisk modell M= <Δ,R> som oppfyller de følgende krav:

(1) (Aα)(αêFm(L) →. Lα êΔ → αêΔ)
(2) (Aα)(αêFm(L) →. αêΔ →. R≠ø → αêR)

Man ser at denne definisjonen av Ł*- modell bare avviker fra den tidligere definisjonen av Ł-modell ved kravet (2). En formel α i L sies å være Ł*-gyldig hvis og bare hvis αêΔ for enhver Ł*-modell M= <Δ,R> . Klassen av alle Ł*-modeller betegner vi med |Ł*|

Vi skal nå i første omgang vise at alle teoremer i Ł* er Ł*-gyldige og omvendt:

Teorem 5.3: Vi har:
(i) (Aα)(αêFm(L) → .Ł* |- α ↔ (AM)(Mê |Ł*| → αêπ;1(M)))

Bevis: (a) For å vise at at alle Ł*-teoremene holder i alle Ł*-modeller er det, i lys av det vi har vist under punkt (a) - (d) i beviset for Teorem 3.6, nok å vise at B1 og B5 holder i enhver Ł*- modell. At B1 er L*gyldig vises på nøyaktig samme måte som under punkt (e) i beviset for Teorem 3.6. Det er derfor unødvendig å se nærmere på det. Vi må imidlertid vise at B5 er Ł*-gyldig. Anta igjen at M=<Δ,R> er en vilkårlig Ł-modell. Det andre kravet i Definisjon 3.2 sier da at (1) (Aα)(αêFm(L) →. αêΔ → .R≠ø → αêR). Nå er enhver enhver Ł*-modell en halvsyntaktisk modell og oppfyller derfor kravet:

(2) (Aα)(αêFm(L) → (LαêΔ ↔ αêR))

Fra (1) følger (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) →. αêΔ → (βêR → αêR)). Fra dette og (2) kan vi så

© Morten Harboe Rognes 2008

slutte: (3) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) →. αêΔ → (Lβê Δ → Lαê Δ)). Men siden Δ er en sannhetsmengde kan vi fra dette slutte

(Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) → (α→(Lβ→Lα))êΔ). Men dette innebærer at B5 holder i enhver Ł*-modell. Dette viser riktigheten av gyldighetsdelen i satsen.

(b) Vi tar så for oss fullstendighetsdelen. Beviset blir i alt vesentlig som for Ł*. Anta α er en vilkårlig formel i L og anta (1) ¬(Ł* |-α). Ved hjelp av definisjonen av konsistent formelmengde kan vi da slutte at {¬α} er en Ł*-konsistent formelmengde. Fra dette og Lindenbaums lemma, Teorem 4.1 følger at det finnes en maksimalt Ł-konsistent formelmengde Γ slik at (2) {¬α} Inkl Γ. Definer R ved å sette:

(3) R = Mg(α: αêFm(L) & LαêΓ)

Definer M ved å sette: (4) M= <Γ,R>. Vi skal vise at M er en Ł*- modell, dvs. oppfyller kravene i Definisjon 3.2. La oss først bemerke at siden Γ er maksimalt konsistent har vi at Γ oppfyller kravene til en sannhetsmengde. Videre følger direkte fra definisjonen (3) at

(5) (Aα)(αêFm(L) → (LαêΓ ↔ αêR)). Dette viser at M er en halvsyntaktisk modell. For å vise at M er en Ł*-modell må vi i lys av Definisjon 3.2 vise følgende:

(6) (Aα)(αêFm(L) →. Lα êΓ → αêΓ)

(7) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) →. αêΓ → (βêR → αêR))

La oss først ta for oss (6). Anta αêFm(L). Da har vi Ł|- Lα→ α. Ved hjelp Teorem 4.2, punkt (iv) kan vi da slutte: (Lα→α)êΓ. Ved hjelp av det samme teorem, punkt (vi) følger Lα êΓ → αêΓ. Dette viser at (6) holder.

Anta α,βêFm(L) og at (8) αêΓ. Vi har Ł|- α → (Lβ→Lα). Derfor følger ved hjelp av Teorem 4.2 at (α→(Lβ → Lα))êΓ. Fra dette og punkt (iv) i det samme teoremet følger sammen med (8) at (Lβ→Lα)êΓ. Herav har vi så (9) LβêΓ → LαêΓ. Ved hjelp av (5) følger så det vi ønsker, nemlig: βêR → αêR. Dette viser at (7) holder. Vi har nå vist at M oppfyller kravene som stilles til en Ł*-modell. Vi har altså:

(10) M=<Γ,R>ê|Ł|. Siden {¬α} Inkl Γ følger at (¬)αêΓ og derfor ¬(αêΓ). Da har vi: ¬(αê π;1(M)). Fra dette følger (EM)(Mê|Ł| & ¬(αê π;1(M))). Dette viser at fullstendighetsdelen i teoremet holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Ettersom det nå er bevist at Ł* er fullstendig, gjenstår det å vise at Ł* er deduktivt ekvivalent med Ł og at klassen av Ł*-modeller er identisk med klassen av Ł-modeller. Dessuten skal vi vise at |Ł*| = |F| U |O|. Vi viser først den deduktive ekvivalens mellom Ł og Ł*:

Teorem 5.4. Anta αêFm(L) Da har vi Ł |- α ↔ Ł* |- α

Bevis: (a) For å vise at alle L*-teoremene er teoremer i Ł er det tilstrekkelig å vise at B5 er et teorem i Ł. Siden B2 er et aksiomskjema i Ł har vi (1) Ł |- (α→β) → (Lα →Lβ). Nå er det klart at det følgende er et rent setningslogisk teorem i Ł: (2) Ł |- β →(α→β) . Videre kan man lett utlede i Ł (3) Ł|- (α →β) →((β→γ) → (α → γ)) Setter man her inn β for α, (α→β) for β og (Lα→Lβ) og bruker modus ponens ser man at vi har Ł |- β →. Lα → Lβ. Fra dette følger så Ł |- α → (Lβ → Lα) ved skifte av syntaktiske variabler. Dette viser at kondisjonalen mot venstre i satsen holder.

(b) Det må også bevises at alle teoremer i Ł er teoremer i Ł*. Det eneste som det da er nødvendig å vise er at B2 er et teorem i Ł*. Vi har: (1) Ł* |- β → Lα → Lβ. Videre har vi: (2) Ł*|- Lα → α. Fra dette utleder man lett: (3) Ł* |- ¬α & Lα → α & (¬α). Videre har vi for alle γ at Ł* |- α & (¬α) → γ. Herav følger (4) Ł* |- α & (¬α) → Lβ . Fra (3) og (4) kan man slutte: (5) Ł* |- ¬α & Lα → Lβ. Herav: (6) Ł* |- ¬α → Lα → Lβ. Fra dette og (1)

© Morten Harboe Rognes 2008

følger så
Ł* |- (α→β) → (Lα → Lβ). Dette viser at B2 er utledbar i Ł*. **QED.**

La oss så vise:

Teorem 5.5 |Ł| = |Ł*|

Bevis: (a) Anta Mê|Ł| for vilkårlig M. Da har vi ved hjelp av Definisjon 3.2 at det finnes Δ,R slik at M=<Δ,R> er en halvsyntaktisk modell for L som oppfyller de følgende krav:

(1) (Aα)(αêFm(L) →. Lα êΔ → αêΔ)

(2) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) →. (α→β)êΔ → αêR → βêR)

Det vil være nok, i lys av definisjonen vi har gitt av Ł*-modell, å vise at M også oppfyller det følgende krav: (3) (Aα)(αêFm(L) →. αêΔ → (R≠ø → αêR)). Anta derfor for vilkårlig α at αêFm(L) & αêΔ & R≠ø. Fra den siste konjunkten følger at det finnes β slik at βêR. Siden αêΔ har vi siden Δ er en sannhetsmengde at (β→α)êΔ. Fra dette, (2) og det at βêR følger at αêR. Dette viser at (3) holder. Dette viser inklusjonen mot høyre i satsen.

(b) Anta på den annen side at Mê|Ł*| for vilkårlig M. Da har vi ved hjelp av Definisjon 3.2 at det finnes Δ,R slik at M=<Δ,R> er en halvsyntaktisk modell for L som oppfyller de følgende krav:

(1) (Aα)(αêFm(L) →. Lα êΔ → αêΔ)

(2) (Aα)(αêFm(L) →. αêΔ →. R≠ø → αêR)

Det vil selvfølgelig være nok å vise at M oppfyller kravet:

(+) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) →. (α→β)êΔ → αêR → βêR).

Anta derfor for vilkårlige α,β at α,βêFm(L) og at (3) (α→β)êΔ & αêR. Fra den første konjunkten følger, siden Δ er en sannhetsmengde, at αêΔ → βêΔ. Herav følger, igjen siden Δ er en sannhetsmengde, at (4) (¬(αêΔ)) v βêΔ. Vi skiller nå mellom to tilfelle. *Tilfelle (i)*: (¬(αêΔ)). Fra (1) følger αêR og derfor siden M er en halvsyntaktisk modell har vi da (Lα)êΔ. Fra dette og det første kravet til en Ł*-modell følger αêΔ. Dette strider åpenbart mot (¬(αêΔ)). Dette tilfellet er derfor utelukket. *Tilfelle (ii)*: βeΔ. Siden αêR har vi R≠ø. Fra dette og (2) følger βêR. Det følger fra dette at (+) holder. Siden (+) holder må M oppfylle alle kravene til en Ł-modell. Vi har derfor Mê|Ł|. Dette viser at inklusjonen mot venstre holder.

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for påstanden. **QED.**

Vi skal nå bevise den følgende sats som viser at mengden av Ł*-modeller er identisk med unionen av F-modellene og mengden av O-modellene. Satsen er denne:

Teorem 5.6 |Ł*| = |F| U |O|

Bevis: (a) Anta Mê|Ł*|. Da har vi at M=<Δ,R> for noe Δ,R der M er en halvsyntaktisk modell som oppfyller følgende krav:

(1) (Aα)(αêFm(L) → Lαê Δ → αêΔ)

(2) (Aα)(αêFm(L) →: αêΔ→. R≠ø → αêR)

Vi må vise at M enten er en O-modell eller en F-modell. Det er to muligheter.

Tilfelle (i): R=ø. Da har vi umiddelbart ved hjelp av definisjonen av F-modell at M er en F-modell.

Tilfelle (ii): R≠ø. Vi må i dette tilfelle vise at (Aα)(αêFm(L) → αêΔ → αêR)
Men dette følger fra to siden vi forutsetter at R≠ø. I dette tilfelle har vi at M er en O-modell. I

© Morten Harboe Rognes 2008

begge tilfelle har vi at M enten er en F- eller en O-modell. Dette viser at inklusjonen mot høyre i satsen holder.

(b) Anta Mê|F| U |O|. Vi skiller mellom to tilfelle.

Tilfelle (i): Mê|F|. Da har vi at det finnes Δ,R slik at M= <Δ,R> der M er en halvsyntaktisk modell som oppfyller kravet R=ø. Det er nødvendig å vise at modellen M oppfyller (1) og (2) ovenfor. Siden M er en halvsyntaktisk modell har vi (Aα)(αêFm(L) → (LαêΔ ↔ αêR)). Fra dette og det forhold at R=ø følger at det ikke finnes noen formel α slik at LαêΔ. ie. (Aα)(αêFm(L) → ¬(Lα)êΔ). Man ser at dette impliserer (1) ovenfor. Videre ser man at (2) er ekvivalent med

R≠ø → (Aα)(αêFm(L) →: αêΔ → αêR). Men dette holder trivielt om R=ø. Dette viser at M oppfyller kravene til en Ł*-modell.

Tilfelle (ii): Mê|O|. Da har vi atter at det finnes Δ,R slik at M= <Δ,R> der M er en halvsyntaktisk modell. Men M oppfyller nå de følgende to krav:

(1) (Aα)(αêFm(L) → LαêΔ → αêΔ)

(3) (Aα)(αêFm(L) →: αêΔ → αêR)

Man ser imidlertid umiddelbart at at (3) impliserer (2) ovenfor. Derfor oppfyller M alle kravene til en Ł*-modell.

I begge tilfelle har vi at M er en Ł*-modell. Dette viser at inklusjonen mot venstre holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Fra Teorem 5.5 og Teorem 5.6 følger naturligvis (+) |Ł| = |F| U |O|. La oss avslutningsvis vise at (+) impliserer at Teorem 5.1 holder. Anta Ł |- α for vilkårlig formel α. Da har vi i kraft av gyldighetsteoremet for Ł at α holder i enhver Ł-modell. Da holder den i enhver F-modell ifølge (+) og ikraft av fullstendighetsteoremet for F må vi da ha F |- α. Videre vil α også holde i enhver O-modell og derfor har vi O |- α ved hjelp av fullstendighetsteoremet. Vi har altså at dersom Ł |- α så holder også F |-α og O |- α. Anta på den annen side at F |-α og O |- α. Ved hjelp av gyldighetsteoremene for F og O følger det at α holder i alle F-modeller og alle O-modeller. I lys av (+) må derfor α også holde i alle Ł-modeller. Fra dette og fullstendighetsteoremet for Ł følger at Ł|-α. Dette viser at Teorem 5.1 holder.

Det virker som en ganske opplagt sak at det må finnes O-modeller og F-modeller. Men dette må tross alt bevises. La oss gi et bevis for dette:

Teorem 5.7 Man har: |O| ≠ø & |F| ≠ ø

Bevis: (a) Vi viser først at |O| ≠ ø. Definer induktivt en funksjon ξ: Fm(L) → {0,1} ved å sette:
(i) ξ(p)=0 om p er en setningsbokstav. (ii) Er α= ¬β har vi ξ(α) = 1- ξ(β). (iii) Er α=(β→γ) setter vi ξ(α) = 1- (ξ(β)- (1-ξ(γ))) (iv) Er α=Lβ setter vi ξ(α) = ξ(β). Det skulle være klart at funksjon ξ er veldefinert. Definer så Q ved Q= Mg(α: αêFm(L) & ξ(α)=1). Definer R ved R= Mg(α: LαêQ). Man ser da ganske lett at <Q,R> er en halvsyntaktisk modell som oppfyller kravene som stilles til en O-modell. Det finnes følgelig O-modeller.

(b) Vi viser så at |F|≠ø. Definer induktivt en funksjon η: Fm(L) → {0,1} på følgende vis: La H være mengden av alle setningsbokstavene i L utvidet med alle formler av typen Lα der αêFm(L). (i) Er αêH setter vi η(α)=0. Er α= ¬β, for noen βêFm(L), setter vi η(α)=1-η(β). (ii) Er α=(β→γ) setter vi η(α)= 1 - (η(β)- (1-η(γ))). Dermed er funksjonen η fullstendig definert. Definer så Q ved Q= Mg(α: αêFm(L) & η(α)=1) og definer R ved R= Mg(α: αêFm(L) & LαêQ). Man verifiserer da lett at <Q,R> er en halvsyntaktisk modell

© Morten Harboe Rognes 2008

som oppfyller de krav som stilles til en F-modell. Det må derfor finnes F-modeller. Man ser også at man ved å variere konstruksjonsmetoden kan vise at det finnes uendelig mange forskjellige F-modeller. Den samme bemerkning kan gjøres i forbindelse med konstruksjonen nevnt under (a). **QED.**

§6 Gyldighet i Ł* definert ved et sett av matriser.

Łukasiewicz modalsystem Ł er definert som en fire-verdig logikk. I den opprinnelige versjonen[7] er imidlertid de primitive konnektivene materiell implikasjon, negasjon og en mulighetsoperator. Vi har imidlertid fulgt Kripke og brukt nødvendighetsoperatoren istedet for mulighetsoperatoren. Łukasiewitcz gir følgende 4x4- matrise for konnektivet →:

(1) m(→)= [<1,2,3,4>, <1,1,3,3>,<1,2,1,2>,<1,1,1,1>]

Ethvert par <n,m> der n,m ê{1,2,3,4} angir et tall i denne matrisen. For ¬ angis en 1x4 matrise, nemlig:

(2) m(¬)= [<4,3,2,1>].

For L brukes den følgende 1x4-matrise:

(3) m(L)=[<2,2,4,4>]

Man ser fra (1) til (3) at for eksempel m(¬)(1) = 4 og at m(¬)(3)=2. Videre kan man fra (1) se at vi for eksempel må ha m(→)(2,3)=3 og at m(→)(3,2)=2. Endelig ser man fra (3) at for eksempel m(L)(3)=4, mens m(L)(1) = 1.

Vi definerer nå hva vi forstår med en Ł-valusjon for L:

Definisjon 6.1 Med en Ł-valuasjon for L forstår vi en funksjon λ : Fm(L) → {1,2,3,4} som er induktivt definert på følgende måte:

(i) For enhver setningsbokstav p har vi at λ(p) er med i {1,2,3,4}.
(ii) Er α,βêFm(L) har vi at λ(α→β) = m(→)(λ(α),λ(β)).
(iii) Er αêFm(L) har man λ(¬α) = m(¬)(λ(α))
(iv) Er αêFm(L) har man at λ(Lα) = m(L)(λ(α))

Vi definerer så hva som menes med at en formel α er gyldig på basis av Łukasiewicz matriser, kort "matrise-gyldig", ved den følgende definisjon:

Definisjon 6.2 En formel α i L er *matrise*-gyldig hvis og bare hvis vi har at λ(α)=1 for enhver Ł-valuasjon λ for L

Det man nå kan vise er at enhvert teorem i systemet Ł er matrise-gyldig og omvendt at enhver formel i L som er matrise-gyldig er et teorem i systemet Ł. Det første består i å vise at alle aksiomene i Ł er matrise-gyldige og at modus ponens bevarer matrise-gyldighet. Verifikasjonen av dette er en temmelig enkel, men rent mekanisk affære. Oppgaven er arbeidskrevende.

Når det gjelder den andre oppgaven, som består i å vise at enhver formel som er matrise-gyldig også er et teorem i Ł, skal vi gjennomføre den ved å trekke inn de fullstendighets-teoremene vi tidligere har bevist. Av de to oppgavene er dette den mest interessante. Vi formulerer først gyldighetsteoremet for Ł med hensyn på matrise-gyldighet slik:

Teorem 6.3 Anta α er en vilkårlig formel i L. Da har man om Ł |- α at α er matrise-gyldig

7 Slik presenterer i det minste Hughes og Creswell systemet i Hughes & Cresswell [1], side 307 - 310.

© Morten Harboe Rognes 2008

Bevis: Man må verifisere at aksiomskjemaene S1 - S3, samt B1 og B2, er matrise-gyldige. Dessuten må man verifisere at modus ponns bevarer matrise-gyldighet, dvs. at dersom α og α→β begge er matrise-gyldige så er også β matrise-gyldig.Som nevnt er det enkel, men temmelig langtekkelig og kjedelig sak å verifisere at de nevnte aksiomskjemaer er matrise-gyldige. Strengt tatt dreier det seg bare om å sette opp sannhetsverditabellene for disse formlene og merke seg at verdien til hovedkonnektivet alltid blir en uansett hvilke verdier man tilordner variablene. Siden S3 inneholder tre variabler må man imidlertid gå igjennom fire og seksti tilfelle. Det vil føre for langt her. Derimot kan det være av interesse å vise at modus ponens bevarer matrise-gyldighet. Anta α og α→β er matrise-gyldige. Vi skal vise at da er β det også. Anta λ er en vilkårlig Ł-valuasjon for L. Da har vi siden α og (α→β) er gyldige at
λ(α) = 1 & λ(α→β)=1. Hadde da λ(β) noen annen verdi enn 1, gitt at λ(α)=1, ser man fra matrisen m(→) at λ(α→β) ville ha samme verdi som λ(β). Men det strider mot at λ(α→β)=1. Det følger at λ(β)=1. Men siden λ var en vilkårlig valuasjon impliserer dette at β er matrise-gyldig. **QED.**

Vi skal etterhvert vise at dersom en formel α er matrise-gyldig så er den også et teorem i Ł. Men før vi gir vårt argument for dette skal vi innføre en funksjon som forbinder F- og O-modeller med Ł-valuasjoner.

Definisjon 6.4 Anta <a,b>ê|O| x |F|. Vi definerer da en funksjon G(a,b): Fm(L) → {1,2,3,4} ved å sette:

G(a,b)(α) = 1 ↔ α ê(π;1(a)Ωπ;1(b))
G(a,b)(α) = 2 ↔ αê(π;1(a) - π;1(b))
G(a,b)(α) = 3 ↔ αê(π;1(b) - π;1(a))
G(a,b)(α) = 4 ↔ ¬(αêπ;1(a)) & ¬(αêπ;1(b))

I forbindelse med denne definisjonen må man huske på at dersom <a,b>ê|O| x |F| vil a være en O-modell og b være en F-modell. Men enhver F-modell, såvel som O-modell, er et ordnet par der den første komponenten er en sannhetsmengde. π;1(a) vil da være sannhetsmengden i O-modellen og π;1(b) vil være sannhetsmengden i F-modellen.

Vi kan nå faktisk vise det følgende teorem som forbinder funksjonen G(a,b) der <a,b>ê|O| x |F| med Łukasiewicz matriser. Vi har:

Teorem 6.5 Anta <a,b>ê|O| x |F|. Da gjelder om α,βêFm(L):

(i) G(a,b)(¬α) = m(¬)(G(a,b)(α))
(ii) G(a,b)(α→β) = m(→)(G(a,b)(α), G(a,b)(β))
(iii) G(a,b)(Lα) = m(L)(G(a,b)(α))

Bevis: Også beviset for denne satsen er langtekkelig og temmelig mekanisk. Vi skal derfor bare gi fullstendig bevis for (i) og (iii) og nøye oss med å se på enkelte tilfelle når det gjelder punkt (ii).

Ad (i): Anta forutsetningene i satsen holder. Det er fire muligheter når det gjelder G(a,b)(α), siden G(a,b) bare kan anta de fire verdiene 1,2,3 og 4.

(1.1) Anta G(a,b)(α) =1. Fra Definisjon 6.4 har man da at αêπ;1(a) & αêπ;1(b) Siden π;1(a) og π;1(b) er sannhetsmengder har man da åpenbart ¬((¬α)êπ;1(a)) & ¬((¬α)êπ;1(b)). Men i lys ad Definisjon 6.4 impliserer dette G(a,b)(¬)=4. I dette tilfelle holder derfor (i).

(1.2) Anta G(a,b)(α) = 2. Fra definisjonen av G(a,b) følger da αêπ;1(a) & ¬(αêπ;1(b)).

© Morten Harboe Rognes 2008

Herav har vi, siden π;1(a) og π;1(b) er sannhetsmengder, at ¬((¬α)êπ;1(a)) & (¬α)êπ;1(b). Fra dette følger (¬α)ê(π;1(b) - π;1(a)). I lys av Definisjon 6.4 impliserer dette G(a,b)(¬α)=3. Siden m(¬)(2)=3 følger at G(a,b)(¬α) = m(¬)(G(a,b)(α))

(1.3) Anta G(a,b)(α)=3. Da har vi per definisjon, vi behøver ikke nå å nevne hvilken definisjon det dreier seg om, at ¬(αêπ;1(a)) & αê π;1(b). Siden π;1(a) og π;1(b) er sannhetsmengder følger herav (¬α)êπ;1(a) & ¬((¬α)êπ;1(b)). Herav har vi så (¬α)ê(π;1(a)- π;1(b)), og derfor, i lys av av definisjonen av G(a,b), at G(a,b)(¬α)=2. Men m(¬)(3)=2. Derfor har vi også i dette tilfellet: G(a,b)(¬α) = m(¬)(G(a,b)(α)).

(1.4) Anta G(a,b)(α)=4. Da har vi per definisjon at ¬(αêπ;1(a)) & ¬(αê π;1(b)). Siden π;1(a) og π;1(b) er sannhetsmengder følger herav (¬α)êπ;1(a) & (¬α)êπ;1(b). Herav har vi så (¬α)ê(π;1(a) Ω π;1(b)), og derfor, i lys av av definisjonen av G(a,b), at G(a,b)(¬α)=1. Men
m(¬)(4)=1. Derfor har vi også i dette tilfellet: G(a,b)(¬α) = m(¬)(G(a,b)(α)).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (i) i satsen.

Ad (ii): Siden G(a,b)(α) kan anta de fire forskjellige verdiene 1,2,3 og 4, og G(a,b)(β) kan det samme, blir det i alt 4x4, det vil si seksten tilfelle som må undersøkes. Vi velger ut ett av disse tilfellene helt vilkårlig. De resterende overlates til leseren som øvelse.

Vi ser på det tilfelle der (1) G(a,b)(α)=3 og G(a,b)(β)=1. Fra den første konjunkten og definisjonen av G(a,b) følger (2) αêπ;1(b) & ¬(αêπ;1(b)). Fra den andre konjunkten har vi: (3) βêπ;1(a) & βêπ;1(b). Fra den andre konjunkten i (2) følger (¬α)êπ;1(b). Dette sammen med den siste konjunkten i (3) og det faktum at π;1(a) og π;1(b) er sannhetsmengder impliserer at (α→β)êπ;1(b). Tilsvarende følger fra de to første konjunktene i (2) og (3) at (α→β)êπ;1(a). Det følger at (α→)êπ;1(a)Ωπ;1(b). Herav følger så ved hjelp av Definisjon 6.4 at G(a,b)(α→β)=1. Men fra definisjonen av m(→) ser man at m(3,1) = 1. Det følger at G(a,b)(α→β) = m(→)(G(a,b)(α), G(a,b)(β)). Man ser at punkt (ii) holder i dette tilfellet.

Ad (iii): Igjen må man betrakte fire tilfelle ettersom G(a,b)(α) er 1,2,3 eller 4.

(1.1) Anta G(a,b)(α)=1. Da har vi αêπ;1(a) & αêπ;1(b). Siden bê|F| følger at ¬(Lαêπ;1(b)). Siden aê|O| følger fra det at αêπ;1(a) at Lαêπ;1(a). Vi har derfor at Lαê(π;1(a)-π;1(b)) og derfor at G(a,b)(Lα)=2. Siden m(L)(1)=2 følger det at G(a,b)(Lα) = m(L)(G(a,b)(α)). Satsen holder derfor i dette tilfellet.

(1.2) Anta G(a,b)(α)=2. Fra Definisjon 6.4 har vi i dette tilfellet at αêπ;1(a) & ¬(αêπ;1(b)). Fra det siste følger siden b er en F-modell at ¬(Lαêπ;1(b)). Fra det at αêπ;1(a) og det at a er en O-modell følger Lαêπ;1(a). Vi har derfor Lαê(π;1(a)-π;1(b)). Også i dette tilfelle har vi derfor G(a,b)(Lα)=2. Siden m(L)(2)=2 følger det at G(a,b)(Lα) = m(L)(G(a,b)(α)). (iii) holder derfor også i dette tilfellet.

(1.3) Anta G(a,b)(α)=3. Fra Definisjon 6.4 har vi i dette tilfellet at ¬(αêπ;1(a)) & αêπ;1(b). Fra det siste følger siden b er en F-modell at ¬(Lαêπ;1(b)). Fra det at ¬(αêπ;1(a)) og det at a er en O-modell følger ¬(Lαêπ;1(a)). I dette tilfelle har vi derfor G(a,b)(Lα)=4. Siden m(L)(3)=4 følger det at G(a,b)(Lα) = m(L)(G(a,b)(α)). (iii) holder derfor også i dette tilfellet.

(1.4) Anta G(a,b)(α)=4. Fra Definisjon 6.4 har vi i dette tilfellet at ¬(αêπ;1(a)) & ¬(αêπ;1(b)). Fra det siste følger siden b er en Ł-modell at ¬(Lαêπ;1(b)). Fra det at ¬(αêπ;1(a)) og det at a er en O-modell følger ¬(Lαêπ;1(a)). Også i dette tilfelle har vi derfor G(a,b)(Lα)=4. Siden m(L)(4)=4 følger det at G(a,b)(Lα) = m(L)(G(a,b)(α)). (iii) holder derfor også i dette tilfellet.

Man ser at (iii) holder i alle mulige tilfelle. Dette avslutter vårt bevis for satsen. **QED.**

© Morten Harboe Rognes 2008

Før vi kan vise at alle formler som er matrise-gyldige er teoremer i Ł finner vi det hensiktsmessig å gi bevis for ytterligere en sats, nemlig:

Teorem 6.6 Anta <a,b>ê|O|x|F|. Definer en Ł-valuasjon λ ved å sette for alle setningsvariabler p;i (1=1,2,3,.....)

(i) $\lambda(p;i) = 1 \leftrightarrow p;i\ \hat{e}(\pi;1(a)\Omega\pi;1(b))$
$\lambda(p;i) = 2 \leftrightarrow p;i\hat{e}(\pi;1(a) - \pi;1(b))$
$\lambda(p;i) = 3 \leftrightarrow p;i\hat{e}(\pi;1(b) - \pi;1(a))$
$\lambda(p;i) = 4 \leftrightarrow \neg(p;i\hat{e}\pi;1(a)) \& \neg(p;i\hat{e}\pi;1(b))$

Da har vi for alle αêFm(L) at $G(a,b)(\alpha) = \lambda(\alpha)$

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på lengden av formler. (i) Anta α er en setningsvariabel p. da har vi fra forutsetning (i) i satsen og Definisjon 6.4 at $G(a,b)(p) = \lambda(p)$.
(ii) Anta $\alpha = \neg\beta$ og at satsen holder for β. Da har vi ved hjelp av Definisjon 6.1, Teorem 6.5 samt induksjonshypotesen at:

$G(a,b)(\alpha) = G(a,b)(\neg\beta) = m(\neg)(G(a,b)(\beta)) = m(\neg)(\lambda(\beta)) = \lambda(\neg\beta) = \lambda(\alpha)$

Satsen holder derfor i dette tilfelle.
(ii) Anta $\alpha=(\beta\rightarrow\gamma)$ og at satsen holder for β og γ. Da har man, igjen ved hjelp av Definisjon 6.1, Teorem 6.5 samt induksjonshypotesen, at:

$G(a,b)(\alpha) = G(a,b)(\beta\rightarrow\gamma) = m(\rightarrow)(G(a,b)(\beta),G(a,b)(\gamma))$
$= m(\rightarrow)(\lambda(\beta), \lambda(\gamma)) = \lambda(\beta\rightarrow\gamma) = \lambda(\alpha)$

Som man ser holder satsen også i dette tilfellet.
(iii) Anta $\alpha = L\beta$ og at satsen holder for β. Da har vi, igjen ved hjelp av Definisjon 6.1, Teorem 6.5 samt induksjonshypotesen, at:

$G(a,b)(\alpha) = G(a,b)(L\beta) = m(L)(G(a,b)(\beta)) = m(L)(\lambda(\beta)) = \lambda(L\beta) = \lambda(\alpha)$

Dette viser at satsen holder også om $\alpha=L\beta$.
Dermed har vi gitt et fullstendig bevis. **QED.**

Vi kan nå, etter at vi har gjort rede for disse hjelpesetningene, endelig fullføre beviset for vårt siste fullstendighetsteorem for Ł. Man har:

Teorem 6.7 Anta α er en vilkårlig formel i L. Er da α en formel som er matrise-gyldig har man også at Ł |- α

Bevis: Anta α er en vilkårlig formel i L og anta (1) α er matrise-gyldig. Dette innebærer at vi har (2) at $\lambda(\alpha)=1$ for enhver Ł-valuasjon λ for L. Anta for vilkårlige a,b at (3) <a,b>ê |O|x|F|. Definer en Ł-valuasjon λ0 for L ved å sette for hver setningsvariabel p;i (i=1,2,.....)

(4) $\lambda0(p;i) = 1 \leftrightarrow p;i\ \hat{e}(\pi;1(a)\Omega\pi;1(b))$
$\lambda0(p;i) = 2 \leftrightarrow p;i\hat{e}(\pi;1(a) - \pi;1(b))$
$\lambda0(p;i) = 3 \leftrightarrow p;i\hat{e}(\pi;1(b) - \pi;1(a))$
$\lambda0(p;i) = 4 \leftrightarrow \neg(p;i\hat{e}\pi;1(a)) \& \neg(p;i\hat{e}\pi;1(b))$

Ved hjelp av Teorem 6.6 har vi da (5) $G(a,b)(\alpha) = \lambda0(\alpha)$. Men fra (2) og det forhold at λ0 er en Ł-valuasjon for L følger at (6) $\lambda0(\alpha) = 1$. Sammen med (5) impliserer dette $G(a,b)(\alpha)=1$. Dette impliserer i sin tur ved hjelp av Definisjon 6.4 at (7) αêπ;1(a) & αêπ;1(b). Nå var a,b vilkårlige entiteter som oppfylte (3). Vi har derfor vist:

(8) (Aa)(Ab)(<a,b>ê|O|x|F| → αêπ;1(a) & αêπ;1(b))

Anta nå for vilkårlig a at (9) aê|O|. Fra Teorem 5.7 følger at det finnes b0 slik at b0ê|F|. Det

© Morten Harboe Rognes 2008

følger at <a,b0>ê|O|x|F|. Fra dette og (8) følger αêπ;1(a). Siden a var et vilkårlig objekt slik at (9) holder har vi:

(10) (Aa)(aê|O| →αêπ;1(a))

På tilvarende vis kan man vise (11) (Ab)(bê|F| → αêπ;1(b)) siden |O| ≠ø. Fra (10) og (11) følger at α er såvel O-gyldig som F-gyldig. Fra dette og Teorem 4.3 følger (12) O |- α & F |- α. Fra dette og Teorem 5.1 følger Ł |- α. Men α var en vilkårlig formel i L som var matrise-gyldig. Dette viser at satsen holder. **QED.**

§6 Avslutning

Systemet Ł har, som vi nevnte innledningsvis, en rekke merkelige trekk. Man kan for eksempel vise at dersom utsagnene α og β er mulige så er også konjunksjonen av dem mulige. Den følgene formel:

(1) M(α) & M(β) → M(α&β),

er altså et teorem i systemet Ł. Dette virker eiendommelig siden man får noe som virker patent galt om M tolkes på vanlig måte og man setter inn "¬α" for alle forekomster av β i formlen ovenfor. Inntrykket mildnes muligens noe om man noterer at også

(2) M(α) & M(¬α) → M(β)

er et teorem i systemet. Det er i det minste en viss konsekvens i den "galskap" som Łukasiewicz tilbyr oss. Kanskje det er me pussig at man også kan utlede:

(3) (α↔β) → (M(α) → M(β)

Dette innebærer at dersom to påstander har den samme sannhetsverdi så er den ene mulig hvis den andre er det. En annen eiendommelighet er at systemet har seks ureduserbare modaliteter, faktisk de samme som i S5. Reduksjonslovene er imidlertid annerledes enn i det nevnte system. I en ubrutt rekke av L'er og/eller M'er kan alle fjernes unntatt den første. Man har derfor for eksempel at M(L(α)) er ekvivalent med M(α) og at L(M(α)) er ekvivalent med L(α). Særlig det siste virker pussig. Det bør imidlertid bemerkes at intet av dette innebærer at systemet er inkonsistent. [8]

Betraktningene ovenfor tyder på at operatorene L og M ikke har sin vanlige betydning i det Ł-modale systemet, og at det er misvisende å lese disse uttrykkene som henholdsvis "Det er nødvendig at" og "Det er mulig at". Det er imidlertid ikke lett å se hvordan disse uttrykkene skal tolkes i systemet. Det virker helt umulig å oversette dem med uttrykk hentet fra noe vanlig språk.

Et annet problem med systemet er at det er vanskelig å skjønne hva sannhetsverdiene i de matrisene som definerer systemet egentlig står for. Man ser selvfølgelig at verdiene 1 og 4 i en eller annen forstand svarer til sannhetsverdiene sann og usann. Men hva de øvrige verdier egentlig står for er ikke lett å gjøre rede for.

Man kan også spørre seg selv om hvordan Łukasiewicz har kommet frem til de matrisene han stiller opp for konnektivene i L og nøyktig hvilken begrunnelse han har for dem, ut over det at de leder til et konsistent system som inneholder den klassiske setningslogikk. Overveielsene i §6 gir en muligens en viss informasjon av relevans for disse

8 De eiendommelighetene vi har nevnt ovenfor er hentet fra Hughes & Cresswell [1], side 308-309.

© Morten Harboe Rognes 2008

spørsmål, men det er vanskelig å skjønne at dette på noen måte representerer noen fullstendig oppklaring av saken.
Systemet fremtrer som gåtefullt og inviterer til ettertanke. Det har visse klør som griper tak i en og som man ikke så lett kan fri seg fra.

© Morten Harboe Rognes 2008

Referanser

Hughes & Cresswell [1]	Hughes,G.E og Cresswell, M.J., 1968, *An Introduction to Modal Logic*, London, Methuen and Co Ltd
Kripke [1]	Kripke, S.A., 1965, "Semantical analysis of modal logic II, non-normal modal propositional calculi" i *The Teory of Models* ed. J.W. Addison, L. Henkin and A. Tarski, Amsterdam, NorthHolland Publishing Co.
Łukasiewicz [1]	Łukasiewicz, J., 1953, "A system of modal logic", *The Journal of Computing Systems*, Vol.1, pp. 111- 149
Prior [1]	Prior, A.N., 1957, *Time and Modality, Oxford*, The Clarendon Press

© Morten Harboe Rognes 2008